द्विघात समीकरण

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» द्विघात समीकरण क्या है?

प्रश्न 1 (आसान). क्या $x^2 + 3x + 2 = 0$ एक द्विघात समीकरण है?

उत्तर – हाँ, क्योंकि x की सबसे बड़ी घात 2 है।

प्रश्न 2 (आसान). क्या $x^3 + 2x + 1 = 0$ एक द्विघात समीकरण है?

उत्तर – नहीं, क्योंकि x की सबसे बड़ी घात 3 है।

प्रश्न 3 (मध्यम). निम्नलिखित में से कौन-सा द्विघात समीकरण है? (क) $2x - 3 = 0$ (ख) $x(x+1) = 5$ (ग) $5/x + x = 7$

उत्तर – (ख) $x(x+1) = 5$ को $x^2 + x - 5 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है, जो एक द्विघात समीकरण है।

प्रश्न 4 (कठिन). एक आयताकार प्लॉट का क्षेत्रफल 528 वर्ग मीटर है। प्लॉट की लंबाई (मीटर में) उसकी चौड़ाई के दुगुने से एक अधिक है। इस स्थिति को दर्शाने वाला द्विघात समीकरण लिखिए।

उत्तर – माना चौड़ाई = x मीटर। तो लंबाई = $(2x + 1)$ मीटर। क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई => $x(2x + 1) = 528$ => $2x^2 + x - 528 = 0$

» द्विघात समीकरण की पहचान

प्रश्न 5 (आसान). क्या $x^2 - 3x + 4 = 0$ एक द्विघात समीकरण है?

उत्तर – हाँ

प्रश्न 6 (आसान). क्या $x^3 + 2x + 1 = 0$ एक द्विघात समीकरण है?

उत्तर – नहीं

प्रश्न 7 (मध्यम). क्या $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ एक द्विघात समीकरण है?

उत्तर – हाँ

प्रश्न 8 (कठिन). क्या $(x + 1)(x - 2) = (x - 1)(x + 3)$ एक द्विघात समीकरण है?

उत्तर – नहीं

» द्विघात समीकरण के मूल (Roots)

प्रश्न 9 (आसान). $x^2 - 9 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $x = 3, x = -3$

प्रश्न 10 (आसान). $x^2 - 7x = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $x = 0, x = 7$

प्रश्न 11 (मध्यम). $x^2 + 4x - 12 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $x = 2, x = -6$

प्रश्न 12 (कठिन). $2x^2 + 7x + 3 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $x = -1/2, x = -3$

» गुणनखंडन विधि द्वारा मूल ज्ञात करना

प्रश्न 13 (आसान). $x^2 + 5x + 6 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $x = -2, x = -3$

प्रश्न 14 (आसान). $y^2 - 9y + 14 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $y = 2, y = 7$

प्रश्न 15 (मध्यम). $2x^2 + x - 6 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $x = -2, x = 3/2$

प्रश्न 16 (कठिन). $2x^2 + 7x + 52 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $x = -2, x = -5/2$

» विविक्तकर (Discriminant) और मूलों की प्रकृति

प्रश्न 17 (आसान). $x^2 + 5x + 6 = 0$ के लिए विविक्तकर क्या है?

उत्तर – 1

प्रश्न 18 (आसान). अगर D = 0 है, तो मूलों की प्रकृति क्या होगी?

उत्तर – दो बराबर वास्तविक मूल

प्रश्न 19 (मध्यम). समीकरण $3x^2 - 43x + 4 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

उत्तर – दो बराबर वास्तविक मूल

प्रश्न 20 (कठिन). k का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण $2x^2 + kx + 3 = 0$ के दो बराबर मूल हों।

उत्तर – $k = \pm 24$ या $k = \pm 26$

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. जॉन और जीवंती दोनों के पास कुल मिलाकर 45 कंचे हैं। दोनों पाँच-पाँच कंचे खो देते हैं और अब उनके पास बचे कंचों की संख्या का गुणनफल 124 है। इस स्थिति को गणितीय रूप में एक द्विघात समीकरण के तौर पर व्यक्त कीजिए।

› माना जॉन के पास कंचों की संख्या = x है।
› तो जीवंती के पास कंचों की संख्या = 45 - x होगी।
› 5 कंचे खोने के बाद, जॉन के पास बचे = x - 5
› 5 कंचे खोने के बाद, जीवंती के पास बचे = (45 - x) - 5 = 40 - x
› प्रश्न के अनुसार, बचे हुए कंचों का गुणनफल 124 है:
› $(x - 5)(40 - x) = 124$
› गुणा करने पर: $40x - x^2 - 200 + 5x = 124$
› $-x^2 + 45x - 200 = 124$
› समीकरण को मानक रूप में लाने के लिए 124 को बाईं ओर लाएँ:
› $-x^2 + 45x - 200 - 124 = 0$
› $-x^2 + 45x - 324 = 0$
› पूरे समीकरण को -1 से गुणा करने पर (ताकि x^2 धनात्मक हो जाए, यह अच्छा अभ्यास है):
› $x^2 - 45x + 324 = 0$

उत्तर – तो यह समीकरण $x^2 - 45x + 324 = 0$ एक द्विघात समीकरण है जो इस स्थिति को दर्शाता है।

उदाहरण 2. जाँच कीजिए कि क्या $(x + 2)^3 = x^3 - 4$ एक द्विघात समीकरण है?

› पहला कदम, हम समीकरण के बाएँ पक्ष को सरल करेंगे: $(x + 2)^3$ का मतलब है $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$, तो ये हो जाएगा $x^3 + 2^3 + 3(x^2)(2) + 3(x)(2^2) = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$.

› अब, हम इस पूरे बाएँ पक्ष को दाएँ पक्ष के बराबर रखेंगे: $x^3 + 8 + 6x^2 + 12x = x^3 - 4$.

› अब सारे पदों को एक तरफ ले आओ और बराबर में ज़ीरो रखो। $x^3 + 8 + 6x^2 + 12x - x^3 + 4 = 0$.

› यहाँ देखो, x^3 और $-x^3$ आपस में कट जाएँगे, तो क्या बचा? $6x^2 + 12x + 12 = 0$.

› अब, इस समीकरण को ध्यान से देखो। इसमें चर x की सबसे बड़ी घात 2 है। x^2 का गुणांक 6 है, जो कि शून्य नहीं है।

› तो, हाँ, यह एक द्विघात समीकरण है।

उत्तर – हाँ, दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

उदाहरण 3. समीकरण $x^2 + 5x + 6 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले, समीकरण को गुणनखंड विधि से हल करेंगे। हमें 5x को ऐसे दो भागों में बांटना है, जिनका गुणनफल $6x^2$ हो और योग 5x हो।

› तो, 5x को हम 2x और 3x लिख सकते हैं, क्योंकि $2x * 3x = 6x^2$ और $2x + 3x = 5x$।

› समीकरण बन जाएगा: $x^2 + 2x + 3x + 6 = 0$।

› अब हम इसमें से कॉमन लेंगे: $x(x + 2) + 3(x + 2) = 0$।

› तो, $(x + 2)(x + 3) = 0$।

› इसका मतलब है, या तो $(x + 2) = 0$ होगा या $(x + 3) = 0$ होगा।

› अगर $x + 2 = 0$, तो $x = -2$।

› अगर $x + 3 = 0$, तो $x = -3$।

उत्तर – इस समीकरण के मूल -2 और -3 हैं।

उदाहरण 4. द्विघात समीकरण $x^2 - 7x + 12 = 0$ के मूल गुणनखंडन विधि से ज्ञात कीजिए।

› पहला चरण: समीकरण मानक रूप में है: $x^2 - 7x + 12 = 0$. यहाँ a=1, b=-7, c=12 है।

› दूसरा चरण: हमें मध्य पद -7x को दो भागों में तोड़ना है, p और q, ताकि $p+q = -7$ और $p*q = a*c = 1*12 = 12$ हो। ऐसी संख्याएँ हैं -3 और -4। क्योंकि $(-3) + (-4) = -7$ और $(-3) * (-4) = 12$।

› तीसरा चरण: अब समीकरण को ऐसे लिखेंगे: $x^2 - 3x - 4x + 12 = 0$।

› चौथा चरण: पहले दो पदों में से x कॉमन लेंगे, और अगले दो पदों में से -4 कॉमन लेंगे: $x(x - 3) - 4(x - 3) = 0$।

› पांचवा चरण: अब $(x - 3)$ पूरे में से कॉमन लेंगे: $(x - 3)(x - 4) = 0$।

› छठा चरण: अब हम जानते हैं कि दो संख्याओं का गुणनफल शून्य तभी होता है जब उनमें से कोई एक शून्य हो। तो, या तो $(x - 3) = 0$ होगा या $(x - 4) = 0$ होगा।

› सातवां चरण: जब $x - 3 = 0$, तो $x = 3$। और जब $x - 4 = 0$, तो $x = 4$।

उत्तर – इस द्विघात समीकरण के मूल 3 और 4 हैं।

उदाहरण 5. द्विघात समीकरण $2x^2 - 4x + 3 = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति बताइए।

› पहला कदम, समीकरण $2x^2 - 4x + 3 = 0$ की तुलना मानक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करें।

› यहाँ हमें मिलता है: $a = 2$, $b = -4$, $c = 3$।

› अब, विविक्तकर का सूत्र लगाएँ: $D = b^2 - 4ac$।

› मान रखें: $D = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3$।

› गणना करें: $D = 16 - 24$।

› तो, $D = -8$।

› अब, विविक्तकर के मान को देखें: -8 जो कि 0 से छोटा है ($D < 0$)।

› अतः, इस समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है।

उत्तर – विविक्तकर (D) = -8। चूंकि $D < 0$, समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• बोर्ड परीक्षा में अक्सर वास्तविक जीवन की समस्याओं को द्विघात समीकरण के रूप में व्यक्त करने के लिए प्रश्न आते हैं। यह सुनिश्चित करें कि आप 'a 0' वाली शर्त को अच्छे से समझें और 'x²' वाले पद को कभी गायब न करें।

• यह सवाल बोर्ड परीक्षा में अक्सर 1 या 2 नंबर के लिए आता है जहाँ आपको एक समीकरण दिया जाएगा और पूछा जाएगा कि 'क्या यह द्विघात समीकरण है?' तो इसे सरल करने का अभ्यास ज़रूर करना।

• यह टॉपिक बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि मूल ज्ञात करने के तरीके (जैसे गुणनखंड विधि) सीधे सवाल के रूप में आते हैं।

• मध्य पद (bx) को विभक्त करने का तरीका हमेशा ध्यान से करें - योग 'b' और गुणनफल 'ac' के बराबर होना चाहिए। इस पर आधारित सवाल बोर्ड परीक्षा में अक्सर आते हैं।

एक नज़र में रिवीज़न

› द्विघात समीकरण: $ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ a 0

› सरल करो, अधिकतम घात 2 हो, x^2 का गुणांक 0 हो।

› द्विघात समीकरण के मूल = x के वे मान जो समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

› मध्य पद तोड़कर गुणनखंडन विधि से द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करना।